



Chap1 The Foundations: Logic and Proofs

Part I: Propositional Logic

Jin-Hui Wu

2026-03-05

大纲

□ 命题逻辑

□ 谓词逻辑

□ 证明方法

大纲

□ 命题逻辑

□ 命题逻辑定义 (1.1)

□ 命题

□ 逻辑联结词

□ 真值表

□ 命题逻辑应用

□ 命题等价性

□ 等值公式

□ 可满足性

□ 范式

命题

□ 命题 (**proposition**)

□ 一个可以判断真假的陈述句

□ 为真的陈述句称为真命题 (true proposition)

□ 为假的陈述句称为假命题 (false proposition)

例

□ 是命题：

- a) The Moon is made of green cheese.
- b) $1 + 0 = 1$
- c) $0 + 0 = 2$

□ 不是命题：

- a) Sit down!
- b) What time is it?
- c) $x + 1 = 2$
- d) This is a false proposition.

命题

□ 命题的构建

□ T, F

□ 命题变量 (propositional variables)

□ p, q, r, s, \dots

□ 由逻辑联结词 (logical connectives) 与命题构成的复合命题 (compound proposition)

大纲

□ 命题逻辑

□ 命题逻辑定义 (1.1)

- 命题

- 逻辑联结词

- 真值表

□ 命题逻辑应用

□ 命题等价性

- 等值公式

- 可满足性

- 范式

逻辑联结词

□ 常用的逻辑联结词 (logical connectives)

□ 非 Negation \neg

□ 且 Conjunction \wedge

□ 或 Disjunction \vee

□ 蕴含 Implication \rightarrow

□ 双蕴含 Biconditional \leftrightarrow

逻辑联结词：非

- The *negation* (非) of a proposition p is denoted by $\neg p$ and has this **truth table** (真值表) :

p	$\neg p$
T	F
F	T

- **Example:** If p denotes “The earth is round.”, then $\neg p$ denotes “It is not the case that the earth is round,” or more simply “The earth is not round.”

逻辑联结词：且

□ The *conjunction* (且) of propositions p and q is denoted by $p \wedge q$ and has this truth table:

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

逻辑联结词：或

□ The *disjunction* (或) of propositions p and q is denoted by $p \vee q$ and has this truth table:

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

逻辑联结词：或、异或

□ In English “or” has two distinct meanings.

□ **Inclusive Or** (同或)

□ Students who have taken CS202 or Math120 may take this class.

□ For $p \vee q$ to be true, either one or both of p and q must be true.

□ **Exclusive Or** (异或)

□ Soup or salad comes with this entrée.

□ In $p \oplus q$, one of p and q must be true, but not both.

p	q	$p \oplus q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

逻辑联结词：蕴含

- If p and q are propositions, then $p \rightarrow q$ is an *implication* (蕴含) which is read as “if p , then q ”.

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

- In $p \rightarrow q$, p is the *hypothesis* (*antecedent* or *premise*) and q is the *conclusion* (or *consequence*).

逻辑联结词：蕴含的等价表述

- ✓ **if p , then q**
- ✓ **if p , q**
- ✓ **q if p**
- ✓ **p only if q**
- ✓ **p implies q**
- ✓ **q unless $\neg p$**
- ✓ **q when p**
- ✓ **q whenever p**
- ✓ **q follows from p**
- ✓ **p is sufficient for q**
- ✓ **q is necessary for p**

逻辑联结词：蕴含

□ From $p \rightarrow q$ we can form new conditional statements .

□ $q \rightarrow p$ **converse** (逆命题)

□ $\neg p \rightarrow \neg q$ **inverse** (否命题)

□ $\neg q \rightarrow \neg p$ **contrapositive** (逆否命题)

逻辑联结词：双蕴含

□ If p and q are propositions, then we can form the *biconditional* proposition $p \leftrightarrow q$, read as “ p if and only if q .”

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

逻辑联结词：双蕴含的等价表述

- ✓ p if and only if q
- ✓ p is necessary and sufficient for q
- ✓ if p then q , and conversely
- ✓ p iff q

大纲

□ 命题逻辑

□ 命题逻辑定义 (1.1)

- 命题

- 逻辑联结词

- 真值表

□ 命题逻辑应用

□ 命题等价性

- 等值公式

- 可满足性

- 范式

真值表 (truth table)

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

原子命题 (atomic proposition)
及其真值枚举

复合命题 (compound proposition) 及其真值

例

□ 构造下列命题的真值表

$$p \vee q \rightarrow \neg r$$

□ 联结词的运算顺序

□ 非 > 且 > 或 > 蕴含 > 双蕴含

□ $(p \vee q) \rightarrow (\neg r)$

真值表：等价命题

- 等价命题 (**equivalent proposition**)
 - 两个命题是等价的，若他们具有相同的真值
- 证明方法
 - 构造两个命题的真值表并比较

例

□ 蕴含及其逆命题、否命题、逆否命题中，哪些命题是等价的？

□ 蕴含 $p \rightarrow q$

□ 逆命题 $q \rightarrow p$

□ 否命题 $\neg p \rightarrow \neg q$

□ 逆否命题 $\neg q \rightarrow \neg p$

真值表的数量

- 有 n 个命题变元时，真值表有 2^n 行
- 命题在每行有2种真值 (T,F)
- 共有 2^{2^n} 张不同的真值表
- 即有 2^{2^n} 个不同的复合命题

大纲

□ 命题逻辑

□ 命题逻辑定义

- 命题

- 逻辑联结词

- 真值表

□ 命题逻辑应用 (1.2)

□ 命题等价性

- 等值公式

- 可满足性

- 范式

自然语言的命题逻辑表述

□ 步骤

- 寻找逻辑联结词
- 用逻辑联结词将自然语言分成子句
- 将子句用命题变元表示
- 用命题逻辑表示整个句子

例

□ 将下述自然语言用命题逻辑表示

□ If I go to Harry's or to the country, I will not go shopping.

□ 步骤

□ 寻找逻辑联结词

□ 用逻辑联结词将自然语言分成子句

□ 将子句用命题变元表示

□ 用命题逻辑表示整个句子

例

□ 将下述自然语言用命题逻辑表示

□ You can access the Internet from campus only if you are a computer science major or you are not a freshman.

□ 步骤

□ 寻找逻辑联结词

□ 用逻辑联结词将自然语言分成子句

□ 将子句用命题变元表示

□ 用命题逻辑表示整个句子

命题一致性

- 若存在命题变元的赋值使得所有命题均为真，则称这些命题是一致的 (**consistent**)

例

□ 下列命题是否一致？

□ “The diagnostic message is stored in the buffer or it is retransmitted.”

□ “The diagnostic message is not stored in the buffer.”

□ “If the diagnostic message is stored in the buffer, then it is retransmitted.”

若存在命题变元的赋值使得所有命题均为真，
则称这些命题是一致的 (consistent)

例：逻辑谜题

- ❑ An island has two kinds of inhabitants, *knights* (骑士), who always tell the truth, and *knaves* (无赖), who always lie.

- ❑ You go to the island and meet A and B.
 - ❑ A says “B is a knight.”
 - ❑ B says “The two of us are of opposite types.”

- ❑ What are the types of A and B?

大纲

□ 命题逻辑

□ 命题逻辑定义

- 命题

- 逻辑联结词

- 真值表

□ 命题逻辑应用

□ 命题等价性 (1.3)

- 等值公式

- 可满足性

- 范式

永真式、矛盾式、可满足式

□ 永真式 (**tautology**)

□ A proposition which is always true.

□ Example: $p \vee \neg p$

永真式、矛盾式、可满足式

□ 永真式 (tautology)

□ A proposition which is always true.

□ Example: $p \vee \neg p$

□ 矛盾式 (**contradiction**)

□ A proposition which is always false.

□ Example: $p \wedge \neg p$

永真式、矛盾式、可满足式

□ 永真式 (tautology)

□ A proposition which is always true.

□ Example: $p \vee \neg p$

□ 矛盾式 (contradiction)

□ A proposition which is always false.

□ Example: $p \wedge \neg p$

□ 可满足式 (**contingency**)

□ Neither a tautology nor a contradiction.

□ Example: p

逻辑等价

- 命题 p 和 q 等价 (**equivalent**)
 - 若 p 和 q 具有相同真值
 - 若 $p \leftrightarrow q$ 为永真式

- 记作 $p \Leftrightarrow q$ 或 $p \equiv q$

常见的逻辑等价性

□ 恒等律 (Identity Laws)

$$p \wedge T \equiv p$$

$$p \vee F \equiv p$$

常见的逻辑等价性

□ 恒等律 (Identity Laws)

$$p \wedge T \equiv p$$

$$p \vee F \equiv p$$

□ 支配律 (Domination Laws)

$$p \vee T \equiv T$$

$$p \wedge F \equiv F$$

常见的逻辑等价性

□ 恒等律 (Identity Laws)

$$p \wedge T \equiv p$$

$$p \vee F \equiv p$$

□ 支配律 (Domination Laws)

$$p \vee T \equiv T$$

$$p \wedge F \equiv F$$

□ 幂等律 (Idempotent laws)

$$p \vee p \equiv p$$

$$p \wedge p \equiv p$$

常见的逻辑等价性

□ 恒等律 (Identity Laws)

$$p \wedge T \equiv p \qquad p \vee F \equiv p$$

□ 支配律 (Domination Laws)

$$p \vee T \equiv T \qquad p \wedge F \equiv F$$

□ 幂等律 (Idempotent laws)

$$p \vee p \equiv p \qquad p \wedge p \equiv p$$

□ 双重否定律 (Double Negation Law)

$$\neg(\neg p) \equiv p$$

常见的逻辑等价性

□ 恒等律 (Identity Laws)

$$p \wedge T \equiv p \qquad p \vee F \equiv p$$

□ 支配律 (Domination Laws)

$$p \vee T \equiv T \qquad p \wedge F \equiv F$$

□ 幂等律 (Idempotent laws)

$$p \vee p \equiv p \qquad p \wedge p \equiv p$$

□ 双重否定律 (Double Negation Law)

$$\neg(\neg p) \equiv p$$

□ 否定律 (Negation Laws)

$$p \vee \neg p \equiv T \qquad p \wedge \neg p \equiv F$$

常见的逻辑等价性

□ 交换律 (Commutative Laws)

$$p \vee q \equiv q \vee p$$

$$p \wedge q \equiv q \wedge p$$

常见的逻辑等价性

□ 交换律 (Commutative Laws)

$$p \vee q \equiv q \vee p \qquad p \wedge q \equiv q \wedge p$$

□ 结合律 (Associative Laws)

$$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$$

$$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$$

常见的逻辑等价性

□ 交换律 (Commutative Laws)

$$p \vee q \equiv q \vee p \qquad p \wedge q \equiv q \wedge p$$

□ 结合律 (Associative Laws)

$$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$$

$$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$$

□ 分配律 (Distributive Laws)

$$(p \vee (q \wedge r)) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

$$(p \wedge (q \vee r)) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

常见的逻辑等价性

□ 交换律 (Commutative Laws)

$$p \vee q \equiv q \vee p \qquad p \wedge q \equiv q \wedge p$$

□ 结合律 (Associative Laws)

$$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$$

$$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$$

□ 分配律 (Distributive Laws)

$$(p \vee (q \wedge r)) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

$$(p \wedge (q \vee r)) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

□ 吸收律 (Absorption Laws)

$$p \vee (p \wedge q) \equiv p \qquad p \wedge (p \vee q) \equiv p$$

常见的逻辑等价性

□ 德摩根律 (De Morgan's laws)

$$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$$

$$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$

常见的逻辑等价性

□ 德摩根律 (De Morgan's laws)

$$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$$

$$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$

□ 蕴含等值式

$$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$$

常见的逻辑等价性

□ 德摩根律 (De Morgan's laws)

$$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$$

$$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$

□ 蕴含等值式

$$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$$

□ 等价等值式

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

常见的逻辑等价性

□ 德摩根律 (De Morgan's laws)

$$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$$

$$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$

□ 蕴含等值式

$$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$$

□ 等价等值式

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

□ 假言易位

$$p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$$

例

□ 证明下列两式逻辑等价

$$\neg(p \vee (\neg p \wedge q))$$

$$\neg p \wedge \neg q$$

□ 方法一：真值表

□ 方法二：利用等值公式

例

□ 证明下式是永真式

$$(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$$

□ 方法一：真值表

□ 方法二：利用等值公式

大纲

□ 命题逻辑

□ 命题逻辑定义

- 命题

- 逻辑联结词

- 真值表

□ 命题逻辑应用

□ 命题等价性 (1.3)

- 等值公式

- 可满足性

- 范式

可满足式

- 可满足式 (**contingency**)
 - Neither a tautology nor a contradiction.
 - Example: p

- 可满足也称为 **satisfiable**
- 不可满足称为 **unsatisfiable**

例

□ 判断下式的可满足性

$$(p \vee \neg q) \wedge (q \vee \neg r) \wedge (r \vee \neg p)$$

$$(p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$$

$$(p \vee \neg q) \wedge (q \vee \neg r) \wedge (r \vee \neg p) \wedge (p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$$

□ 真值表是一种可行的方法

数独

□ 规则

- 每行有1-9
- 每列有1-9
- 每个九宫格有1-9

	2	9				4		
			5			1		
	4							
				4	2			
6							7	
5								
7			3					5
	1			9				
							6	

数独

□ 定义 $p(i, j, n)$ 为第 i 行第 j 列为数字 n

□ 第1行有数字1

$$p(1,1,1) \vee p(1,2,1) \vee \cdots \vee p(1,9,1)$$

	2	9				4		
			5			1		
	4							
				4	2			
6							7	
5								
7			3					5
	1			9				
							6	

数独

□ 定义 $p(i, j, n)$ 为第 i 行第 j 列为数字 n

□ 第1行有数字1

$$p(1,1,1) \vee p(1,2,1) \vee \cdots \vee p(1,9,1)$$

□ 第1行有数字 n

$$\bigvee_{j=1}^9 p(1, j, n)$$

	2	9				4		
			5			1		
	4							
				4	2			
6								7
5								
7			3					5
	1			9				
							6	

数独

□ 定义 $p(i, j, n)$ 为第 i 行第 j 列为数字 n

□ 第1行有数字1

$$p(1,1,1) \vee p(1,2,1) \vee \cdots \vee p(1,9,1)$$

□ 第1行有数字 n

$$\bigvee_{j=1}^9 p(1, j, n)$$

□ 每行有数字1-9

$$\bigwedge_{i=1}^9 \bigwedge_{n=1}^9 \bigvee_{j=1}^9 p(i, j, n)$$

	2	9				4		
			5			1		
	4							
				4	2			
6								7
5								
7			3					5
	1			9				
							6	

数独

□ 定义 $p(i, j, n)$ 为第 i 行第 j 列为数字 n

□ 每行有数字 1-9

$$\bigwedge_{i=1}^9 \bigwedge_{n=1}^9 \bigvee_{j=1}^9 p(i, j, n)$$

□ 每列有数字 1-9

$$\bigwedge_{j=1}^9 \bigwedge_{n=1}^9 \bigvee_{i=1}^9 p(i, j, n)$$

□ 每个九宫格有数字 1-9

$$\bigwedge_{r=0}^2 \bigwedge_{s=0}^2 \bigwedge_{n=1}^9 \bigvee_{i=1}^3 \bigvee_{j=1}^3 p(3r + i, 3s + j, n)$$

	2	9				4		
			5			1		
	4							
				4	2			
6								7
5								
7			3					5
	1			9				
								6

数独

□ 定义 $p(i, j, n)$ 为第 i 行第 j 列为数字 n

□ i, j, n 均值为1-9

□ 共有 $9^3 = 729$ 个命题变元

□ 真值表有 $2^{729} > 10^{216}$ 行

	2	9				4		
			5			1		
	4							
				4	2			
6							7	
5								
7			3					5
	1			9				
							6	

数独

□ 定义 $p(i, j, n)$ 为第 i 行第 j 列为数字 n

□ i, j, n 均值均为1-9

□ 共有 $9^3 = 729$ 个命题变元

□ 真值表有 $2^{729} > 10^{216}$ 行

	2	9				4		
			5			1		
	4							
				4	2			
6							7	
5								
7			3					5
	1			9				
							6	

□ 约束可满足性问题是NP完全的 (NP-complete)

□ 当下没有高效的精确解

大纲

□ 命题逻辑

□ 命题逻辑定义

- 命题

- 逻辑联结词

- 真值表

□ 命题逻辑应用

□ 命题等价性 (1.3)

- 等值公式

- 可满足性

- 范式

范式

- 析取范式 (**disjunctive normal form, DNF**)
 - 若干个“且串” (合取式) 的“或” (析取)
- 合取范式 (**conjunctive normal form, CNF**)
 - 若干个“或串” (析取式) 的“且” (合取)

范式

□ 析取范式 (**disjunctive normal form**, DNF)

□ 若干个“且串” (合取式) 的“或” (析取)

□ 合取范式 (**conjunctive normal form**, CNF)

□ 若干个“或串” (析取式) 的“且” (合取)

□ $(a \wedge b) \vee (\neg b \wedge c \wedge d) \vee (\neg c)$

□ $(a \vee \neg b \vee c) \wedge (d \vee e)$

□ $a \rightarrow b$

范式

- 析取范式 (**disjunctive normal form, DNF**)
 - 若干个“且串” (合取式) 的“或” (析取)
- 合取范式 (**conjunctive normal form, CNF**)
 - 若干个“或串” (析取式) 的“且” (合取)
- 每个命题均可以写为析取范式或合取范式

例

□ 求下式的合取范式

$$\neg(p \rightarrow q) \vee (r \rightarrow p)$$

□ 列真值表

□ 所有T的行对应析取范式

□ 所有F的行对应合取范式

总结

- 命题：命题变元和逻辑联结词的组合
- 逻辑联结词：非、且、或、蕴含、双蕴含
- 自然语言的逻辑命题表述
- 真值表
 - 证明等值公式
 - 判断一致性
 - 解逻辑谜题
 - 判断可满足性
 - 写析取范式、合取范式